Corrigés chap. 7 CONSERVATION ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

Exercice 7.3 Mouvement perpétuel

1. Le bilan des puissances donne l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{g}.\mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}.\mathbf{v} dS = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^{\mathbf{2}} dV + \int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon} dV \tag{17}$$

Le premier terme représente bien la puissance de la force de gravitation :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{g}.\mathbf{v} dV = \mathbf{g}.\mathbf{v} \int_{\Omega} \rho dV = mgv \tag{18}$$

où v est la vitesse du centre de gravité du système bille + ressort.

En cas d'absence de friction, la force appliquée sur le système bille+ressort est nulle. Donc, le deuxième terme est nul.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}.\mathbf{v} dS = 0 \tag{19}$$

Le troisième terme est le terme d'énergie cinétique et vaut :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^{\mathbf{2}} dV = \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\mathbf{2}} \int_{\Omega} \rho dV) = \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} m v^2) \tag{20}$$

Le quatrième terme représente la puissance due à la déformation du système bille+ressort, avec $\dot{\epsilon} = \frac{D\epsilon}{Dt}$ et $\sigma = E\epsilon$ (E représente le module d'élasticité). Ce terme peut également s'écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon} dV = \int_{\Omega} E\epsilon : \dot{\epsilon} dV \tag{21}$$

A l'aide de l'égalité $2\epsilon : \dot{\epsilon} = \frac{D}{Dt}(\epsilon^{\mathbf{2}})$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} E \frac{D}{Dt} (\epsilon^{\mathbf{2}}) dV = \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} \epsilon^2 \int_{\Omega} E dV) = \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} K \epsilon^2) \tag{22}$$

En ajoutant les termes nous donne :

$$mgv - \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} m v^2) - \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} K \epsilon^2) = 0 \tag{23}$$

En remplaçant v par $\frac{dz}{dt}$, le terme final qui sera constant au cours du mouvement du système bille+ressort est donné par :

$$mgz - (\frac{1}{2}mv^2) - (\frac{1}{2}K\epsilon^2) = Cte \tag{24}$$

2. Avant que le ressort ne touche le sol, le quatrième terme $(\frac{1}{2}K\epsilon^2)$ est nul, et à partir de l'équation (23), nous pouvons trouver la vitesse lors de la chute libre de la bille :

$$mgv = \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}mv^2) \tag{25}$$

En remplaçant v par $\frac{dz}{dt}$ et en intégrant par rapport à t, on obtient :

$$mg\frac{dz}{dt} = \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}mv^2) \;\Rightarrow\; mg\Delta z = \frac{1}{2}m(v^2 - 0) \tag{26}$$

D'où, la vitesse lors de la chute libre de la bille devient :

$$v = \sqrt{2g\Delta z} \tag{27}$$

3. Au début de la compression du ressort z augmente alors que v diminue, à partir de l'équation (23) nous avons donc :

$$mgv = \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}mv^2) + \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}K\epsilon^2) \tag{28}$$

A $z = 0$ on a $v = v_0$ et, l'équation régissant le mouvement devient donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\epsilon^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{29}$$

4. Lors de la compression maximale du ressort, $v = 0$ et nous avons également $\epsilon_{max} = z_{max}/L$, qui donne l'équation ci-dessous au deuxième ordre à résoudre :

$$\frac{1}{2}K(z_{max}/L)^2 - mg(z_{max}) = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{30}$$

Qui pour solution suivante (avec z>0) :

$$z_{max} = \frac{mgL^2}{K}(1 + \sqrt{(1 + \frac{Kv_0^2}{mg^2L^2}}))\tag{31}$$

5. Pour z tel que $0 < z < z_{max}$, le mouvement d'ascension du système bille + ressort doit satisfaire l'équation ci-dessous (avec $\epsilon = \frac{z}{L}$ et $v = \frac{dz}{dt}$) :

$$\frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2 + \frac{1}{2}K(z/L)^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (32)$$

La solution de cette équation différentielle donnera le déplacement z en fonction du temps lorsque le ressort touche le sol. En négligeant les frottements, le système bille+ressort rebondit après avoir touché le sol, jusqu'à la position H. La séquence chute libre-rebond jusqu'à la position H est répétée.

6. Dans une situation réelle, où les frottements ne sont pas négligés, il y aura un travail négatif accompli par les forces de friction (deuxième terme de l'équation (17)). Donc, dans ce cas, la position finale de la bille va diminuer avec le temps de H à 0.

Exercice 7.7 Refroidissement newtonien

Un corps de masse m, de volume V et de chaleur spécifique, c_p, constante est suffisamment petit pour que lors de son refroidissement on puisse considérer sa température comme uniforme.

Réécrire l'équation de conservation de l'enthalpie par unité de masse, h, (eq. 8.32) appliquée au cas présent.

$$\rho\frac{\partial h}{\partial t} + \rho\vec{v}.\vec{\nabla}h + \mathrm{div}\,\vec{j}_T = \dot{Q}_T$$

Pas de source/puits de chaleur donc $Q_T = 0$.
Pas de transport de fluide donc **v** = 0.
c_p est constante donc $h = c_pT$. Il vient alors $\rho c_p\dot{T} + \mathrm{div}\vec{j}_T = 0$

Intégrer cette équation sur le volume V en utilisant le théorème de la divergence et en appliquant une condition de Cauchy pour le refroidissement en surface $\vec{j}_T = h\,(T\text{-}T_{ex})\,\vec{n}$ ou h est le coefficient de transfert thermique en W/m²K et T_{ex} la température du milieu extérieur

$$\int_V \rho c_p\dot{T} + \int_V \mathrm{div}\vec{j}_T = \rho V c_p\dot{T} + \int_S \vec{j}_T.\vec{n}dS = \rho V c_p\dot{T} + \int_S h(T\text{-}T_{ex})dS = 0$$

Comme T est uniforme dans le volume V, elle est aussi uniforme sur sa surface et on peut donc intégrer l'équation : $\rho V c_p\dot{T} + h(T\text{-}T_{ex})S = 0$

Résoudre alors cette équation différentielle pour obtenir la loi T(t) en posant $T(0)=T_0 > T_{ex}$. On fera alors apparaitre le temps t_0 caractéristique du problème.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :
solution particulière $T = T_{ex}$
équation homogène : $\rho V c_p\dot{T} + hST = 0$ qui a pour solution

$$T = Ae^{(-hSt/\rho c_p V)} = Ae^{(-t/t_o)} \quad \text{avec} \quad t_0 = (\rho c_p V)/(Sh) = (mc_p)/(Sh)$$

La constante A est donnée par la condition initiale. Il vient alors : $T = T_{ex} + (T_0\text{-}T_{ex})e^{(-t/t_o)}$

Quelle est la limite de cette approche ?

La pièce doit rester petite car le flux diffusif en son sein est négligé en disant que sa température est uniforme. En réalité, un gradient de température soit s'installer dans la pièce elle-même sinon, elle ne pourrait pas refroidir !

NB : Pour bien voir la limite du modèle, on pourrait résoudre le même problème sur une boule de rayon R en considérant la diffusion à l'intérieur de la sphère. Cela mène à une équation aux dérivées partielles qu'il convient de résoudre par méthodes numériques approchées.

Avec T=T(r,t) pour r variant de 0 à R: $-k\Delta T+\rho Cp\dfrac{\partial T}{\partial t} = -k\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right]\right)+\rho Cp\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$

avec $-k\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h(T(r{=}R)-T_{ex})$ et $T(0,r) = T_0$.

Exercice 7.9 : température dans une conduite cylindrique

Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e est parcourue par un fluide chaud à température T_i. Une perte de chaleur se fait par diffusion $\vec{j}_T = -k\vec{\nabla}T$ à travers la paroi de la conduite. La conduite est constituée d'un métal de conductivité thermique k et de chaleur spécifique Cp, toutes deux supposées constantes. La température est fonction seulement de r, distance à l'axe de la conduite.

Ecrire la loi générale de conservation de l'enthalpie appliquée au cas de la chaleur en précisant la signification physique de chacun des termes.

On se place dans un repère cylindrique avec z selon l'axe du cylindre. La température est alors fonction seulement de r, distance à l'axe de la résistance puisqu'on néglige les effets d'extrémités en z (H très grand devant R) et qu'il y a invariance du problème par rotation d'angle θ. Conservation de l'enthalpie : $\rho\dfrac{\partial h}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,h + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_T = \dot{Q}_T$

Dans notre cas, il n'y pas de vitesse du matériau donc le terme de transport est nul. De plus, on n'a aucun terme de production de chaleur. Enfin le vecteur flux de chaleur j_T vaut –k gradT.

Appliquer cette loi au cas présent en supposant un état stationnaire et en écrivant que h = Cp T.

La conservation de l'enthalpie devient dans notre cas : $-k\Delta T+\rho Cp\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 = -k\Delta T$

La température dans le métal vérifie donc $\Delta T = 0$.

Résoudre alors cette équation en supposant $T(R_i) = T_i$ et $T(R_e) = T_e$. On fera apparaitre le terme $\dfrac{T-T_i}{T_e-T_i}$. On rappelle que dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), le laplacien d'une fonction scalaire f(r,θ,z) vaut $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right]+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$T = T(r)$ et $\Delta T = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right]=0$ soit $\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right]=0,\ r\dfrac{\partial T}{\partial r}=A$

$\dfrac{\partial T}{\partial r}=A/r$ et T = Aln(r) +B, CL: AlnRi + B =Ti et AlnRe + B =Te qui donne $\dfrac{T-T_i}{T_e-T_i} = \ln(r/Ri)/\ln(Re/Ri)$

Calculer la perte de chaleur en surface de la conduite sur une hauteur H.

La perte vaut sur la surface extérieure en r = Re :

$$2\pi R_e Hk\frac{\partial T}{\partial r} = 2\pi R_e Hk(T_e-T_i)/R_e\ln(Re/Ri)= 2\pi Hk(T_e-T_i)/\ln(Re/Ri)$$

Cette perte est égale à la chaleur rentrant dans le cylindre en r = Ri puisque le régime est stationnaire. $2\pi R_i Hk\dfrac{\partial T}{\partial r} = 2\pi R_i Hk(T_e-T_i)/R_i\ln(Re/Ri)= 2\pi Hk(T_e-T_i)/\ln(Re/Ri)$